Ravninski grafi

Tina Malec

6. februar 2007

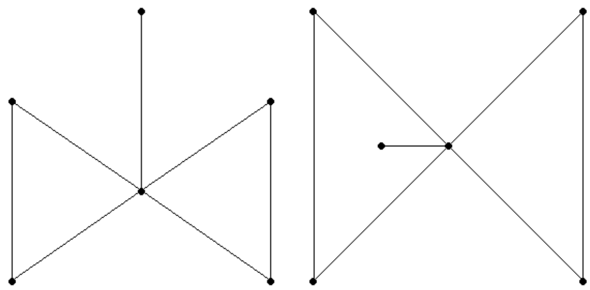
Predstavili bomo nekaj osnovnih dejstev o ravninskih grafih, pojem dualnega grafa (k danemu grafu) ter kako ugotoviti, ali je nek graf ravninski.

1 Osnovni pojmi in definicije

Označimo z $\mathbb{R}^2$ evklidsko ravnino. *Poligonalna* ali *lomljena črta* v ravnini je enostavna krivulja v $\mathbb{R}^2$, ki je sestavljena iz končno mnogo daljic oz. ravnih črt. Pri tem dovolimo tudi sklenjene lomljene črte.
Graf G je *ravninski ali planarni graf*, če lahko njegova vozlišča predstavimo kot različne točke v evklidski ravnini, vsako povezavo grafa G pa kot lomljeno črto, ki povezuje tisti dve točki, ki ustrezata krajiščema te povezave. Pri tem se različne povezave lahko sekajo le v skupnih krajiščih. Dodatna zahteva je, da nobena povezava ne vsebuje drugih točk (vozlišč) kot svojih krajišč. Če imamo dano ravninsko predstavitev grafa G, pravimo tudi, da je graf G *vložen v ravnino.* Tako predstavitev imenujemo *ravninska predstavitev* grafa G ali *poligonalna vložitev grafa G v ravnino.*

Zgornjo definicijo povejmo še bolj neformalno. Graf G je ravninski natanko tedaj, ko ga lahko narišemo v ravnini, tako da se poljubni par povezav seka le v skupnem krajišču (torej ne pride do križanja povezav).
Vsaka ravninska vložitev grafa G razdeli ravnino na območja, ki jih poimenujemo *lica* ali *območja vloženega grafa G.* Natanko eno od lic je vedno neomejeno; poimenujemo ga *zunanje* ali *neomejeno lice.* Z *$F(G)$* označimo število lic grafa G. Če je f poljubno lice, lahko definiramo *dolžino oz. velikost lica f*, ki pomeni število povezav, ki omejujejo naše lice oz. ki sestavljajo njegov rob. Dolžino lica f označimo z $l(f)$. Velikost lica f torej predstavlja število povezav grafa G, ki jih prehodimo, če se sprehodimo po robu lica f, pri čemer so prehojene povezave štete z večkratnostjo.

Opomba: Vložitev grafa G v ravnino ni nujno enolična (obstaja lahko več različnih predstavitev v ravnini, glej zgled spodaj). Število lic ravninskega grafa pa je vedno enako, torej invariantno glede na vložitev grafa v ravnino.



Slika 1: Vložitev grafa v ravnino ni nujno enolična.

Zgornjo strukturo lahko podamo tudi s topološkega vidika. Tako razjasnimo tudi obstoj natanko enega neskončnega lica (uporabimo dejstvo, da smo v evklidskem prostoru).
Dano imamo ravninsko predstavitev grafa G. Če iz $\mathbb{R}^2$ (kot evklidski topološki prostor) odstranimo vse točke in lomljene črte, ki ustrezajo vozliščem in povezavam danega grafa G, evklidska ravnina razpade na s potmi povezane dele. To so natanko lica oz. območja vloženega grafa G.
Neomejeno lice je natanko eno, saj je slika grafa G (vozlišča slikamo v točke ravnine, povezave pa v lomljene črte) kompaktna (in zato omejena) podmnožica evklidske ravnine. V povezavi s tem naj na tem mestu omenimo Jordanov izrek. Izrek spada v okvir topologije in ga v tem delu ne bomo dokazali.

Izrek 1.1 (Jordanov izrek za lomljene črte) *Naj bo C sklenjena lomljena črta v ravnini. Tedaj je $\mathbb{R}^2 \backslash C$ sestavljen iz natanko dveh odprtih, nepraznih, disjunktnih, povezanih množic* ext(C) *in* int(C)*, ki sta omejeni s C.*

Posledica 1.2 *Naj bo C sklenjena lomljena črta v $\mathbb{R}^2$ in naj bo P lomljena črta, ki povezuje točki p,q na C. Naj velja $P \cap C = \{p, q\}$. Označimo s S_1 in S_2 oba segmenta C od p do q. Potem ima $P \cup C$ natanko tri lica, ki so omejena s C, $P \cup S_1$ in $P \cup S_2$.*

Dokaz: Po Jordanovem izreku ima vsaka od sklenjenih črt oz. risb C, $P \cup S_1$ in $P \cup S_2$ natanko dve lici, eno omejeno in eno neomejeno. Vsako lice risbe $P \cup C$ je vsebovano v preseku lica risbe $P \cup S_1$ in lica risbe $P \cup S_2$, saj je $(P \cup S_1) \cup (P \cup S_2) = P \cup C$. Predpostavili bomo, da je $P \setminus \{p, q\}$ v omejenem licu črte C.
Označimo z X omejeno in z Y neomejeno lice črte C ter z X_i omejeno in z Y_i neomejeno lice risbe $P \cup S_i$. Ker je $X_i \subseteq X$, velja $Y \subseteq Y_i$. Možni preseki so:

- $X_1 \cap Y_2$: Iz $Y \subseteq Y_2$ sledi $(S_1 \setminus \{p, q\}) \subseteq Y_2$, zato je $X_1 \subseteq Y_2$. Odtod sledi, da je $X_1 \cap Y_2 = X_1$ lice.
- $X_1 \cap X_2 = \emptyset$: Ker je presek prazen, ne dobimo nobenega lica risbe $P \cup C$.
- $Y_1 \cap X_2$: kot v prvem primeru dobimo, da je X_2 lice.

- $Y_1 \cap Y_2$: Iz $Y \subseteq Y_1 \cap Y_2$ sledi, da je $Y_1 \cap Y_2 = Y$ lice.

Pregledali smo vse možnosti in dobili natanko tri lica. ∎

Za poljuben graf velja lema o rokovanju (velja tudi za graf, ki vsebuje zanke in vzporedne povezave, saj te prispevajo 2 k stopnji vsake točke). Za ravninske grafe pa imamo še eno različico, t.i. lemo o rokovanju za ravninske grafe.

Izrek 1.3 (Lema o rokovanju za ravninske grafe) *Naj bo G povezan ravninski graf. Potem je vsota dolžin vseh lic ravninskega grafa G je enaka dvakratnemu številu povezav grafa G, t.j.*

$$2|E(G)| = \sum_{f \in F(G)} l(f).$$

Dokaz: Vsaka povezava graf G meji na natanko dve lici grafa G. Če seštejemo dolžine vseh lic v grafu G, bo torej vsaka povezava šteta natanko dvakrat. Odtod sledi:

$$2|E(G)| = \sum_{f \in F(G)} l(f).$$

∎

Opomba: Lemo o rokovanju za ravninske grafe lahko dokažemo tudi z uporabo pojma dualnega grafa. Dokaz je podan v razdelku 5.

2 Eulerjeva formula

Pomembna posledica prejšnjih izrekov je t.i. *Eulerjeva formula.*

Posledica 2.1 (Eulerjeva formula) *Naj bo G 2-povezan graf, vložen v ravnino. Označimo z v število vozlišč, z e število povezav in s f število lic grafa G. Tedaj velja:*

$$v - e + f = 2.$$

Dokaz: Dokazujemo z indukcijo po številu povezav e.

- Baza indukcije: $e = 0$. Potem je $G = K_1$, torej graf z enim samim vozliščem in zato tudi z enim samim licem. Dobimo $v - e + f = 1 - 0 + 1 = 2$.

- Naj bo G ravninski graf, vložen v ravnino z $e + 1$ povezavami. Tedaj ločimo dve možnosti:

  1. Denimo, da v G obstaja točka x stopnje 1 (x je list). Definirajmo graf $G' = G - x$. Potem dobimo $v' = v - 1$, $e' = e - 1$ in $f' = f$, saj smo grafu G vzeli eno točko, eno povezavo, število lic pa se ni spremenilo, ker je bila x točka stopnje 1. Ker je G' podgraf v G, lahko uporabimo indukcijsko predpostavko na G'. Torej velja $v' - e' + f' = 2$, torej $v - 1 - (e - 1) + f = 2$, kar pa je ravno Eulerjeva formula $v - e + f = 2$ za graf G.

2. Denimo, da G ne vsebuje točke stopnje 1, torej so vse točke stopnje dve ali več. Torej G vsebuje nek cikel C. Naj bo xy povezava na tem ciklu. Ta povezava je na robu dveh lic f_1 in f_2, za kateri velja npr. $f_1 \in \mathrm{Int(C)}$ ter $f_2 \in \mathrm{Out(C)}$. Torej sta si ti lici različni. Če popvezavo xy odstranimo, se lici f_1 in f_2 združita v eno samo lice. Oglejmo si graf $G' = G - xy$. Po prejšnjem premisleku je torej $v = v'$, $e = e' + 1$ in $f = f' + 1$. Ker je G' podgraf v G, lahko uporabimo indukcijsko predpostavko na G'. Torej velja $v' - e' + f' = 2$, torej $v - (e - 1) + (f - 1) = 2$, kar pa je ravno Eulerjeva formula $v - e + f = 2$ za graf G.

■

Opazimo lahko, da za nepovezane grafe Eulerjeva formula ne velja. Imejmo unijo grafov: $G = K_1 \cup K_1$. To seveda je ravninski graf in očitno je $|E(G)| = 0$, $|V(G)| = 2$ ter $|F(G)| = 1$. Vendar pa je $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 3$.

Opomba: V izreku smo delali z 2-povezanim grafom. V resnici formula velja za vsak povezan ravninski graf, vendar pa tedaj lica niso nujno omejena s cikli. Tu je tudi očitno, kar smo omenili že prej, namreč da število lic ni odvisno od vložitve v ravnino.

Posledica 2.2 *Naj bo G ravninski graf. Potem velja:*

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 1 + \Omega(G),$$

kjer je $\Omega(G)$ število komponent grafa G.

Dokaz: Označimo $k = \Omega(G)$ ter $|V(G)| = v$, $|E(G)| = e$, $|F(G)| = f$ ter $|V(G_i)| = v_i$, $|E(G_i)| = e_i$, $|F(G_i)| = f_i$. Vemo, da je G disjunktna unija svojih komponent:

$$G = \bigcup_{i=1}^{k} G_i.$$

Ogledam si poljubno komponento G_i. Ker je G_i povezan ravninski graf, zanj velja Eulerjeva formula:

$$v_i - e_i + f_i = 2. \tag{1}$$

Ker so komponente disjunktne, velja:

$$v = \sum_{i=1}^{k} v_i \qquad \text{in} \qquad e = \sum_{i=1}^{k} e_i. \tag{2}$$

Ker za vsako od komponent velja Eulerjeva formula, bomo dobili sistem k enačb oblike (1). Enačbe seštejemo in dobimo:

$$\sum_{i=1}^{k} v_i - \sum_{i=1}^{k} e_i + \sum_{i=1}^{k} f_i = 2k.$$

Razmislimo glede števila lic. Omejena lica poljubnih dveh komponent so si disjunktna, skupno jima je le neskončno lice. Torej v vsoti $\sum_{i=1}^{k} f_i$ štejemo neskončno lice kar k-krat in zato velja:

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = f + (k-1).$$

Sedaj lahko izpeljemo ustrezno formulo za graf G:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} v_i - \sum_{i=1}^{k} e_i + \sum_{i=1}^{k} f_i &= 2k; \\
v - e + f + (k-1) &= 2k; \\
v - e + f &= k + 1.
\end{aligned}$$

■

Iz Eulerjeve formule izpeljemo še dve zelo uporabni trditvi, ki sta potrebna pogoja, da je nek graf planaren. Uporabljamo ju predvsem pri dokazovanju neobstoja vložitve v ravnino (glej poglavje 4).

Posledica 2.3 *Naj bo G enostaven povezan ravninski graf na vsaj treh točkah (torej z vsaj dvema povezavama). Označimo število vozlišč z v, število povezav z e ter število lic grafa G z f. Potem velja*

$$3f \leq 2e \qquad \textit{in} \qquad e \leq 3v - 6.$$

Dokaz: Iz predpostavk o grafu G sledi, da je vsako lice dolžine vsaj 3. Uporabimo lemo o rokovanju za ravninske grafe

$$3f \leq \sum_{x \in F(G)} 3 \leq \sum_{x \in F(G)} l(x) = 2e$$

in tako dobimo

$$3f \leq 2e. \tag{3}$$

Iz (2) vemo, da je $f \leq \frac{2e}{3}$. Ker je G povezan ravninski graf, lahko uporabimo Eulerjevo formulo $f = e - v + 2$. Ko upoštevamo prejšnjo neenačbo, dobimo $e \leq 3v - 6$. ■

Posledica 2.4 *Naj bo G enostaven povezan ravninski graf brez trikotnikov na vsaj treh točkah. Označimo število vozlišč z v, število povezav z e ter število lic grafa G z f. Potem velja*

$$4f \leq 2e \qquad \textit{in} \qquad e \leq 2v - 4.$$

Dokaz: Dokaz poteka podobno kot pri Posledici 2.3. Ker v grafu G nimamo trikotnikov, je vsako lice dolžine vsaj 4. Po lemi o rokovanju za ravninske grafe

$$3f \leq \sum_{x \in F(G)} 3 \leq \sum_{x \in F(G)} l(x) = 2e$$

zato sledi

$$4f \leq 2e. \tag{4}$$

Po (3) sledi $f \leq \frac{e}{2}$. Ker je G povezan ravninski graf, lahko uporabimo Eulerjevo formulo: $v - e + f = 2$. Ko upoštevamo prejšnjo neenačbo, dobimo $e \leq 2v - 4$. ■

Posledica 2.5 *Naj bo G povezan enostaven ravninski graf. Potem ima G vsaj eno točko stopnje 5 ali manj.*

Dokaz: Dokazovali bomo s protislovjem. Po Posledici 2.3 je $e \leq 3v - 6$. Denimo, da so vse točke v grafu G stopnje vsaj 6. Sledi, da je $6v \leq 2e$, saj je po lemi o rokovanju vsota stopenj vseh točk enaka $2e$. Torej je $3v \leq e$. Prišli smo v protislovje, torej v grafu G zagotovo obstaja točka stopnje 5 ali manj. ■

3 Poliedri

Če so vsa lica ravninskega grafa G enake dolžine g, potem rečemo, da je ravninska risba grafa G *po licih regularna reda g*. *Polieder* je oglato telo, ki ga omejujejo le ravne ploskve. Polieder je *konveksen*, če daljica, ki povezuje katerikoli točki poliedra, vsa leži v notranjosti ali na robu poliedra.

Opomba: Vsak polieder lahko projiciramo na ravnino s t. i. *stereografsko projekcijo.*

Izrek 3.1 *Obstaja samo pet regularnih konveksnih poliedrov: tetraeder, kocka, dodekaeder, oktaeder in ikozaeder.*

Dokaz: Uporabili bomo Eulerjevo formulo, saj je stereografska projekcija regularnega konveksnega poliedra ravninski graf. Izrek bomo dokazali tako, da bomo pokazali, da obstaja natanko pet ravninskih grafov, ki imajo naslednje lastnosti:

1. G je regularen graf stopnje $d \geq 3$;

2. vsaka ravninska risba grafa G je po licih regularna stopnje $g \geq 3$.

Označimo z v število vozlišč, z e število povezav ter z f število lic takega ravninskega grafa G. Iz zgornjih pogojev lahko sklepamo:

1. ker je G d-regularen graf, uporabimo lemo o rokovanju in dobimo $e = \frac{1}{2}dv$. Iz tega sledi $v = \frac{2e}{d}$;

2. ker je G g-regularen po licih, uporabimo lemo o rokovanju za ravninske grafe in dobimo: $e = \frac{1}{2}gf$. Iz tega sledi: $f = \frac{2e}{g}$.

Ker je G ravninski graf, lahko uporabimo Eulerjevo formulo, v katero vstavimo zgoraj dobljena izraza za v in f ter dobimo:

$$\frac{2e}{d} - e + \frac{2e}{g} = 2.$$

Preuredimo in dobimo:

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{2} + \frac{1}{g} = \frac{1}{e}.$$

Ker je $\frac{1}{e} > 0$, lahko napišemo še strožjo neenakost: $\frac{1}{d} + \frac{1}{g} > \frac{1}{2}$. Po predpostavkah je vsako od števil d in $g \geq 3$, zato sta števili $\frac{1}{d}$ in $\frac{1}{g} \leq \frac{1}{3}$. Če to uporabimo v prejšnji neenakosti, ki jo malo "obrnemo", dobimo dve novi neenačbi:

$$\frac{1}{d} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \qquad \text{in} \qquad \frac{1}{g} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}. \tag{5}$$

To je "maksimalna ocena"in sklepamo lahko, da je $d < 6$ in $g < 6$. Torej so 3, 4 in 5 edine možne vrednosti za števili d in g. Vendar če dobro razmislimo, lahko hitro ugotovimo, da mora biti vedno eno od števil d in g enako 3. Če sta namreč tako d kot g oba hkrati > 3, bi lahko sklepali naslednje:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{g} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

To je protislovje z eno od zgornjih ugotovitev, ki je sledila neposredno iz dejstva, da je $e > 0$ (vemo, da $\frac{1}{d} + \frac{1}{g} > \frac{1}{2}$). Preostane nam torej natanko pet primerov (za izračun vozlišč, povezav in lic uporabljamo gornje enačbe):

1. $d = 3$, $g = 3$: dobimo $1/e = 1/3 - 1/2 + 1/3 = 1/6$, torej $e = 6$. Sledi $v = 8$ in $f = 4$. Dobimo *tetraeder*.

2. $d = 3$, $g = 4$: dobimo $1/e = 1/3 - 1/2 + 1/4 = 1/12$, torej $e = 12$. Sledi $v = 8$ in $f = 6$. Dobimo *kocko*.

3. $d = 3$, $g = 5$: dobimo $1/e = 1/3 - 1/2 + 1/5 = 1/30$, torej $e = 30$. Sledi $v = 20$ in $f = 12$. Dobimo *dodekaeder*.

4. $d = 4$, $g = 3$: dobimo $1/e = 1/4 - 1/2 + 1/3 = 1/12$, torej $e = 12$. Sledi $v = 6$ in $f = 8$. Dobimo *oktaeder*.

5. $d = 5$, $g = 3$: dobimo $1/e = 1/5 - 1/2 + 1/3 = 1/30$, torej $e = 30$. Sledi $v = 12$ in $f = 20$. Dobimo *ikozaeder*.

■

4 Preverjanje ravninskosti

Trditev 4.1 *Graf K_5 ni ravninski.*

Dokaz: Graf K_5 ima 10 povezav in 5 vozlišč vsako lice pa je dolžine 3. Če je res ravninski, mora po posledici 2.3 veljati $e \leq 3v - 6$. Dobimo $10 \leq 9$, kar je protislovje. Torej K_5 ni ravninski graf. ∎

Trditev 4.2 *Graf $K_{3,3}$ ni ravninski.*

Dokaz: Graf $K_{3,3}$ je brez trikotnikov, ima 6 vozlišč in 9 povezav. Če je res ravninski, mora po posledici 2.4 veljati $e \leq 2v - 4$. Dobimo $9 \leq 8$, kar je protislovje. Torej $K_{3,3}$ ni ravninski graf. ∎

Da lahko razumemo nadaljnje trditve in izreke, moramo vpeljati nekaj novih pojmov. Imamo graf G in izberemo povezavo $e \in E(G)$. *Skrčitev povezave* je operacija na grafu G, pri kateri identificiramo krajišči izbrane povezave e ter odstranimo zanko, ki nastane iz povezave e in morebitne vzporedne povezave, ki se pojavijo, če je e del trikotnika v G. Graf, ki ga pridobimo s skrčitvijo te povezave, označimo z G/e.

Povezavo e smo *subdividirali*, če smo jo v grafu nadomestili s potjo dolžine 2.
Graf H je *minor (podrejeni graf)* grafa G, če ga lahko konstruiramo iz nekega podgrafa grafa G z nekim zaporedjem skrčitev povezav. Pravimo, da je graf G skrčljiv na graf H. Vsak graf je skrčljiv sam nase (t.j., upoštevamo tudi prazno zaporedje skrčitev povezav).
Graf H je *subdivizija* grafa G, če ga lahko konstruiramo iz grafa G, tako da nekatere povezave v G nadomestimo s potmi dolžine 2 ali več. V splošnem torej nadomestimo poljubne povezave grafa G z različno dolgimi potmi, ki povezujejo iste pare točk.

Posledica 4.3 *Če graf G vsebuje subdivizijo grafa K_5 ali $K_{3,3}$, potem G ni ravninski graf.*

Dokaz: Očitno, saj že K_5 oz. $K_{3,3}$ nista ravninska grafa. ∎

Dokazali bomo celo več, kot pove posledica 4.3. Velja namreč tudi obrat, kar je prvi dokazal Kuratowski. To je najpomembnejši izrek v tem poglavju. Obstaja tudi temu izreku ekvivalenten izrek z minorji (Wagnerjev izrek).

Izrek 4.4 (Wagner) *Graf G je ravninski natanko tedaj, ko ne vsebuje grafov K_5 in $K_{3,3}$ kot minorja.*

Izrek 4.5 (Kuratowski) *Graf G je ravninski natanko tedaj, ko ne vsebuje subdivizij grafov K_5 ali $K_{3,3}$.*

Opomba: Da dokažemo izrek Kuratowskega, moramo najprej dokazati nekaj pomožnih trditev in lem.

Lema 4.6 *Naj bo G 3-povezan graf na vsaj petih točkah. Tedaj obstaja taka povezava $e \in E(G)$, da je graf G/e 3-povezan.*

Dokaz: Denimo, da za vsako povezavo e graf G/e ni 3-povezan. Očitno je 2-povezan. Torej obstajata točki, ki graf G/e razdelita na dva dela. Ena od teh točk ustreza stisnjeni povezavi, sicer bi ti dve točki razbili graf G. Označimo drugo točko z z. Če je $e = xy$, potem je graf $G - \{x, y, z\}$ nepovezan. Sedaj izberimo $e = xy$ in z tako, da bo največja komponenta H grafa $G - \{x, y, z\}$ imela kar se da mnogo točk. Naj bo H' ena od ostalih komponent in $u \in V(H')$ točka, ki je sosedna z z. Ker tudi G/zu ni 3-povezan graf, obstaja točka v, da je $G - \{z, u, v\}$ nepovezan. Potem obstaja komponenta H'' grafa $G - \{z, u, v\}$, ki vsebuje več točk kot H, saj H'' vsebuje $[H \cup \{x, y, \}] \setminus \{v\}$. Namreč, za vsako točko v' v grafu $H \cup \{x, y, z\}$ obstajajo tri poti do točk x, y in z, torej v in z ne razbijeta grafa $H \cup \{x, y, z\}$. ■

Naslednje leme ni težko dokazati, zato ta del prepuščamo bralcu.

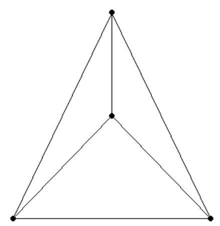
Lema 4.7 *Če graf G ne vsebuje subdivizije grafov K_5 ali $K_{3,3}$, potem tudi graf G/e ne vsebuje subdivizij K_5 ali $K_{3,3}$.*

Vložitev grafa v ravnino je *ravnočrtna*, če so vse povezave predstavljene z ravnimi črtami (daljicami). Vložitev grafa v ravnino je *konveksna*, če so vsa omejena lica konveksna, neomejeno lice pa je komplement konveksnega mnogokotnika. Vsaka konveksna vložitev je tudi ravnočrtna vložitev v ravnino (z morebitno izjemo povezav na zunanjem, neomejenem licu).

Lema 4.8 *Naj bo G 3-povezan graf, ki ne vsbuje subdivizije grafov K_5 ali $K_{3,3}$. Tedaj ima G ravnočrtno, konveksno vložitev v ravnino.*

Dokaz: Dokazujemo z indukcijo na število točk n grafa G.

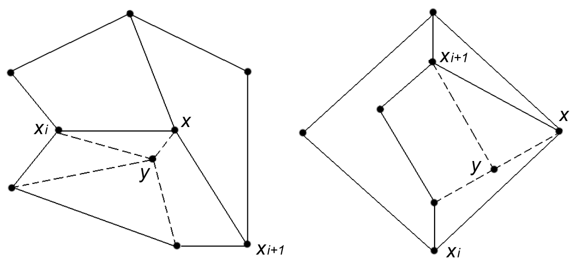
- Baza indukcije: Naj bo $n = 4$. Očitno, vzamemo kar graf K_4, ki je edini tak graf:



Slika 2: Ravnočrtna konveksna vložitev K_4 v ravnino.

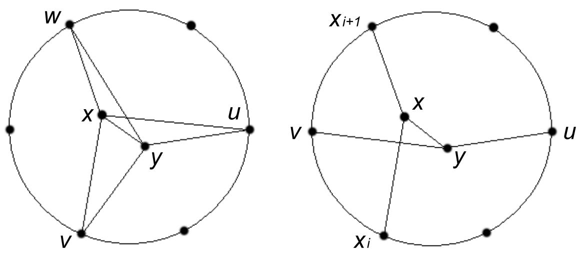
- Indukcijski korak: Naj bo $n \geq 5$. Naj bo e taka povezava s krajiščima x in y, da je graf G/e 3-povezan, kar nam zagotavlja Lema 4.6. Označimo z z točko, ki jo dobimo po skrčitvi povezave e. Po Lemi 4.7 graf G/e ne vsebuje subdivizij grafov K_5 ali $K_{3,3}$.. Po indukcijski predpostavki obdržimo ravnočrtno vložitev v ravnino grafa $H = G/e$, v kateri ne obstaja trojica točk, ki bi ležale na isti črti grafa H.
 V tej vložitvi ima podgraf, ki ga dobimo tako, da odstranimo povezave s krajiščem v z, lice, ki vsebuje z. To lice je lahko tudi neomejeno. Ker je graf $H - z$ 2-povezan, ga omejuje nek cikel C. Vsa vozlišča, sosedna z z, ležijo na C. V prvotnem grafu G so te točke lahko sosede x, y ali pa celo obeh.
 Ravnočrtna konveksna vložitev grafa H v ravnino vsebuje ravne črte od točke z do vseh njenih sosedov. Naj bodo $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ sosedi točke x v urejenem vrstnem redu na ciklu C. Sedaj lahko nastopijo tri različne moznosti možnosti:

  - Primer 1: Če vsi sosedi točke y ležijo na odseku od x_i do x_{i+1}, potem ohranimo konveksno vložitev grafa G, tako da za x vzamemo kar točko z, za y pa neko točko na risbi, ki jo določata povezavi xx_i in xx_{i+1} in je sosednja z z (Slika 3).



Slika 3: Dokaz Leme 4.8, primer 1.

  - Primer 2: x in y imata tri skupne sosede u, v in w. V tem primeru cikel C, povezava xy in vse povezave iz množice $\{x, y\}$ v množico $\{u, v, w\}$ tvorijo subdivizijo grafa K_5 (Slika 4).



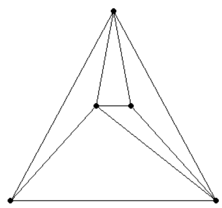
Slika 4: Dokaz Leme 4.8, primer 2 in primer 3.

- Primer 3: y ima soseda u in v, ki na ciklu C ležita med sosedoma x_i in x_{i+1} točke x. V tem primeru cikel C, poti uyv in $x_i x x_{i+1}$ ter povezava xy tvorijo subdivizijo grafa $K_{3,3}$ (Slika 4).

Ker smo predpostavili, da je G graf, ki ne vsebuje podgrafa s subdivizijami K_5 ali $K_{3,3}$, zadnja dva primera ne moreta nastopiti. Torej upoštevamo le prvi primer.

■

Opomba: Edina možnost za 3-povezan graf na petih točkah, ki ne vsbuje subdivizije grafov K_5 ali $K_{3,3}$, je polni graf K_5 brez ene povezave, torej $K_5 - e$.



Slika 5: Ravnočrtna konveksna vložitev $K_5 - e$ v ravnino.

Posledica 4.9 (Stein-Tutte) *Vsak 3-povezan ravninski graf ima ravnočrtno, konveksno vložitev v ravnino.*

Opomba: Do sem smo pokazali, da velja izrek Kuratowskega za vse 3-povezane grafe. Veljavnost v splošnem pa potrdi naslednja lema.

Lema 4.10 *Naj bo G enostaven graf z vsaj štirimi točkami, ki sam ne vsebuje subdivizije grafa K_5 ali $K_{3,3}$, če pa povežemo poljubni par nesosednih točk, ustvarimo ravno eno od teh dveh subdivizij. Potem je graf G 3-povezan.*

Dokaz: Dokazujemo z indukcijo na število točk n grafa G.

- $n = 4$: Očitno, saj je graf K_4 edini 3-povezan graf na štirih točkah..
- $n = 5$: Edina možnost, da izpolnimo predpostavke leme je, da je graf G kar polni graf K_5 brez ene povezave, torej $K_5 - e$. Tak graf pa je 3-povezan.
- $n \geq 6$: Očitno je G povezan. Če ni 2-povezan, ima presečno točko v. Naj bosta v_1 in v_2 točki, sosedni z v, ki ležita v različnih blokih grafa G. Če dodatek povezave v_1v_2 ustvari subdivizijo K_5 ali $K_{3,3}$, potem je taka subdivizija vsebovana že v grafu G. Podoben sklep napravimo, če ima G (2-povezan graf) nesosedni točki x in y, ki razcepita graf G.
  Naj bosta sedaj x in y sosedni točki in graf $G - \{x, y\}$ nepovezan. Razcepimo graf G na dva dela. Definirajmo G_1 in G_2 kot komponenti, ki ju dobimo potem, ko grafu

G odvzamemo točki x in y, nato pa vsaki izmed dobljenih komponent spet dodamo ti dve točki ter vse povezave med njima in točkami posamezne komponente. Če povežemo poljubni dve nesosedni točki v G_1 oz. G_2, dobimo subdivizijo v grafu G in tudi v G_1 oz. G_2. Po indukcijski predpostavki pa je G_1 oz. G_2 potem bodisi K_3 ali pa 3-povezan. Dalje, po Stein-Tuttovem izreku imata G_1 in G_2 konveksni vložitvi v ravnino. Naj bo sedaj $z_i \in V(G) \setminus \{x, y\}$ točka, ki leži na istem licu kot x in y vložitve grafa G_i v ravnino, $i \in \{1, 2\}$. Graf $G + z_1 z_2$ vsebuje subdivizijo K_5 ali $K_{3,3}$. Ogledamo si glavne točke tega podgrafa. Izkaže se, da gre za subdivizijo grafa $K_{3,3}$ ter da je pet glavnih točk v G_1 in ena v $V(G_2) \setminus V(G_1)$ (ali pa obratno). Označimo točko, ki je sosedna z x, y in z_1 kot w . Potem graf $G_1' = G_1 + w$ vsebuje subdivizijo $K_{3,3}$. Toda to ni mogoče. G_1 je namreč ravninski graf, ki ima točke x, y in z_1 na istem licu, torej je tudi graf G_1' ravninski in ne more vsebovati subdivizije $K_{3,3}$.

■

Opomba: Sledeča posledica dokončno dokaže izrek Kuratowskega.

Posledica 4.11 *Vsak enostaven ravninski graf ima ravnočrtno vložitev v ravnino.*

Dokaz: Z dodajanjem povezav med nesosednimi točkami dobimo graf, ki še ne vsebuje subdivizije grafov K_5 ali $K_{3,3}$, vendar pa vsaka nova povezava ustvari tak podgraf. Dobljeni graf je po prejšnji lemi 3-povezan (ali pa K_1, K_2 oz. K_3), zato ima konveksno vložitev. Če izbrišemo dodane povezave, dobimo ravnočrtno vložitev začetnega grafa. ■

5 Dualnost

Danemu povezanemu ravninskemu grafu lahko definiramo *dualni graf* G^* na naslednji način:

1. Naredimo ravninsko risbo grafa G.

2. Izberemo po eno točko v notranjosti vsakega lica ravninske risbe. To so vozlišča grafa G^*.

3. Za vsako povezavo e ravninske risbe grafa G narišemo črto, ki povezuje točki G^* na obeh straneh povezave e.

Opomba: Različne vložitve grafa G v ravnino določajo različne dualne grafe G^* (vsaka ravninska risba grafa G določa natanko en dualni graf G^*).

Med številom točk, lic in povezav grafa G in njegovega duala obstaja zveza, o kateri govori naslednji izrek.

Izrek 5.1 *Naj bo G povezan ravninski graf z v točkami, e povezavami in f lici. Potem ima njegov dualni graf G^* f točk, e povezav in v lic.*

Opomba: Drugače povedano:

- Lice grafa G ustreza točki grafa G^*.
- Povezava grafa G ustreza povezavi grafa G^*.
- Točka grafa G ustreza licu grafa G^*.

Iz definicije dualnega grafa in izreka zgoraj lahko hitro vidimo, da je dual G^* vedno povezan ravninski graf. Povezanost G^* ni odvisna od povezanosti G, saj povezujemo točke, ki ustrezajo licem prvotnega grafa in nobeno lice ne more biti izolirano od drugih lic. Ravninskost zagotovi prav tako definicija, saj konstruiramo povezave duala G^* tako, da se črte ne križajo. Vsakemu licu namreč priredimo eno izmed njegovih notranjih točk, te točke pa povežemo glede na sosednost lic; če sta lici sosednji, sta njima prirejeni točki povezani. Torej lahko konstruiramo dual grafa G^*, to je graf $(G^*)^*$. Po kratkem razmisleku pridemo do sklepa, da je njegov dual natanko graf G (konstrukcijo le obrnemo). V primeru, ko je G povezan ravninski graf, pa je torej graf $(G^*)^*$ izomorfen grafu G. Torej v tem primeru med G in G^* obstaja prava dualnost.

Kot zanimivost naštejmo še dva dualna pojma.

- Cikel grafa G ustreza prerezu grafa G^*.
- Prerez grafa G ustreza ciklu grafa G^*.

Opomba: Za lažjo predstavo: če si izberemo cikel v G, nam bodo povezave v G^* med sabo ločile ravno točke znotraj cikla od tistih, ki so zunaj s cikla (dobimo torej ravno povezavni prerez).

Iz zgornjih dveh dejstev lahko ugotovimo, da zanke (cikli stopnje 1) in večkratne povezave (cikli stopnje 2) v grafu G predstavljajo ravno točke stopnje 1 in stopnje 2 v dualu G^*, zato se bomo poskušali izogibati tema dvema primeroma, da res vedno dobimo enostavne grafe (glej nadaljnje izreke in trditve).

Trditev 5.2 *Če je G povezan ravninski graf z f lici in $e \geq 0$ povezavami ter brez točk stopnje 1 ali 2, potem je:*

$$e \leq 3f - 6.$$

Dokaz: Ker je G ravninski, obstaja njegov dualni graf G^*. Ta je (po definiciji dualnega grafa) spet ravninski graf z e povezavami in f vozlišči. Ker je G povezan graf z minimalno stopnjo $\delta \geq 3$, ima G^* vsaj tri točke. Po posledici 2.3 velja $e \leq 3f - 6$. To je ravno iskana formula. ■

Trditev 5.3 *Če je G povezan ravninski graf brez točk stopnje 1 ali 2, potem ima G lice dolžine največ 5.*

Dokaz: Spet uporabimo eno od posledic Eulerjeve formule, in sicer posledico 2.5. Iz predpostavk sledi, da obstaja grafu G dualni graf G^*, ki je povezan ravninski graf brez zank in vzporednih povezav. Po posledici 2.5 v G^* obstaja točka stopnje 5 ali manj. Torej (po izreku 5.1) v G obstaja lice dolžine 5 ali manj. ∎

Opomba: Pravimo, da sta si trditvi 2.5 in 5.3 *dualni trditvi.*

Na tem mestu lahko še enkrat omenimo lemo o rokovanju za ravninske grafe.

Izrek 5.4 (Lema o rokovanju za ravninske grafe) *Naj bo G povezan ravninski graf. Potem je vsota stopenj vseh lic ravninskega grafa G je enaka dvakratnemu številu povezav grafa G:*

$$2|E(G)| = \sum_{f \in F(G)} l(f).$$

Dokaz: Lica grafa G so natanko vozlišča njegovega dualnega grafa G^*, zato velja, da je vsota stopenj vseh lic grafa G enaka vsoti stopenj vseh točk grafa G^*. Na grafu G^* lahko uporabimo (splošno) lemo o rokovanju in dobimo:

$$2|E(G^*)| = \sum_{x_i \in V(G^*)} deg(x_i).$$

Ker je množica povezav ista pri obeh grafih: $E(G) = E(G^*)$, lahko enačbo zgoraj prepišemo v "ekvivalentno"obliko (obe vsoti štejeta vsako povezavo dvakrat, množici povezav pa sta enaki):

$$2|E(G)| = \sum_{f \in F(G)} l(f).$$

∎

Izrek 5.5 *Če je G 3-povezan ravninski graf, potem je njegov dualni graf G^* enolično določen.*

Literatura

[1] M. Juvan, P. Potočnik: *Teorija grafov in kombinatorika*, DMFA, 2000.

[2] R. J. Wilson, J. J. Watkins: *Uvod v teorijo grafov*, DMFA, (1997).

[3] D. B. West: *Introduction to Graph Theory*, Second Edition, Prentice Hall, 2001.

[4] R. Diestel: *Graph Theory*, Electronic Edition 2000, Springer-Verlag New York, 2000.